꼭 알아야할 자주 출제되는 유형

❶ 거듭제곱근 계산하기
❷ 거듭제곱근을 지수를 사용하여 나타내기
❸ 어떤 자연수의 n제곱근이 되도록 하는 n의 개수 구하기
★❹ 지수가 실수인 식 계산하기

‣ 유형 ◂ 거듭제곱과 거듭제곱근
[2019년 6월 학평 가형 2학년 / 정답률 84%]

1. $\sqrt[3]{5} \times \sqrt[3]{25}$ 의 값을 구하시오.

‣ 유형 ◂ 거듭제곱과 거듭제곱근
[2019년 6월 학평 가형 2학년 / 정답률 30%]

2. 두 집합 $A=\{5, 6\}$, $B=\{-3, -2, 2, 3, 4\}$가 있다. 집합
$C=\{x \mid x^a = b,\ x\text{는 실수},\ a \in A,\ b \in B\}$에 대하여 $n(C)$의 값을 구하시오.

‣ 유형 ◂ 거듭제곱과 거듭제곱근
[2019년 6월 학평 나형 2학년 / 정답률 65%]

3. $\sqrt{(-2)^6} + (\sqrt[3]{3} - \sqrt[3]{2})(\sqrt[3]{9} + \sqrt[3]{6} + \sqrt[3]{4})$ 의 값은?

① 7　② 9　③ 11　④ 13　⑤ 15

‣ 유형 ◂ 거듭제곱과 거듭제곱근
[2019년 9월 학평 가형 2학년 / 정답률 59%]

4. 모든 실수 x에 대하여 $\sqrt[3]{-x^2+2ax-6a}$ 가 음수가 되도록 하는 모든 자연수 a의 값의 합을 구하시오.

‣ 유형 ◂ 지수의 확장과 지수법칙
[2019년 6월 학평 가형 2학년 / 정답률 85%]

5. $\left(4^{\frac{1}{3}}\right)^3$ 의 값은?

① 1　② 2　③ 3　④ 4　⑤ 5

‣ 유형 ◂ 지수의 확장과 지수법칙
[2019년 6월 학평 가형 2학년 / 정답률 74%]

6. 양수 a와 두 실수 x, y가

$$15^x = 8,\ a^y = 2,\ \frac{3}{x} + \frac{1}{y} = 2$$

를 만족시킬 때, a의 값은?

① $\frac{1}{15}$　② $\frac{2}{15}$　③ $\frac{1}{5}$　④ $\frac{4}{15}$　⑤ $\frac{1}{3}$

▸ 유형 ◂ 지수의 확장과 지수법칙
[2019년 6월 학평 가형 2학년 / 정답률 76%]

7. 반지름의 길이가 r인 원형 도선에 세기가 I인 전류가 흐를 때, 원형 도선의 중심에서 수직 거리 x만큼 떨어진 지점에서의 자기장의 세기를 B라 하면 다음과 같은 관계식이 성립한다고 한다.

$$B=\frac{kIr^2}{2(x^2+r^2)^{\frac{3}{2}}}$$ (단, k는 상수이다.)

전류의 세기가 $I_0\,(I_0>0)$으로 일정할 때, 반지름의 길이가 r_1인 원형 도선의 중심에서 수직 거리 x_1만큼 떨어진 지점에서의 자기장의 세기를 B_1, 반지름의 길이가 $3r_1$인 원형 도선의 중심에서 수직 거리 $3x_1$만큼 떨어진 지점에서의 자기장의 세기를 B_2라 하자. $\frac{B_2}{B_1}$의 값은? (단, 전류의 세기의 단위는 A, 자기장의 세기의 단위는 T, 길이와 거리의 단위는 m이다.)

① $\frac{1}{6}$　② $\frac{1}{4}$　③ $\frac{1}{3}$　④ $\frac{5}{12}$　⑤ $\frac{1}{2}$

▸ 유형 ◂ 지수의 확장과 지수법칙
[2019년 6월 학평 가형 2학년 / 정답률 36%]

8. 자연수 n에 대하여 $f(n)$이 다음과 같다.

$$f(n)=\begin{cases}\sqrt[4]{9\times 2^{n+1}} & (n\text{이 홀수})\\ \sqrt[4]{4\times 3^n} & (n\text{이 짝수})\end{cases}$$

10 이하의 두 자연수 p, q에 대하여 $f(p)\times f(q)$가 자연수가 되도록 하는 모든 순서쌍 (p,q)의 개수는?

① 36　② 38　③ 40　④ 42　⑤ 44

▸ 유형 ◂ 지수의 확장과 지수법칙
[2019년 6월 학평 가형 2학년 / 정답률 1%]

9. $2\le k<500$인 자연수 k에 대하여 네 자연수 a, b, c, d가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) a, b, c, d는 2 이상 k 이하이다.
(나) $a^{\frac{1}{b}}\times c^{\frac{1}{d}}=24^{\frac{1}{5}}$

모든 순서쌍 (a,b,c,d)의 개수가 59가 되도록 하는 k의 최댓값과 최솟값을 각각 M, m이라 할 때, $M+m$의 값을 구하시오.

▸ 유형 ◂ 지수의 확장과 지수법칙
[2019년 6월 학평 나형 2학년 / 정답률 85%]

10. $(\sqrt[3]{3})^3$의 값은?

① 1　② 2　③ 3　④ 4　⑤ 5

▸ 유형 ◂ 지수의 확장과 지수법칙
[2019년 6월 학평 나형 2학년 / 정답률 85%]

11. $8^{\frac{1}{3}}\times 16^{\frac{1}{4}}$의 값은?

① 1　② 2　③ 4　④ 8　⑤ 16

▸ 유형 ◂ 지수의 확장과 지수법칙
[2019년 6월 학평 나형 2학년 / 정답률 76%]

12. $1\le n\le 15$인 자연수 n에 대하여 $(\sqrt[3]{7})^n$이 자연수가 되도록 하는 모든 n의 개수는?

① 1　② 2　③ 3　④ 4　⑤ 5

▸ 유형 ◂ 지수의 확장과 지수법칙
[2019년 9월 학평 가형 2학년 / 정답률 89%]

13. $(2^3\times 2)^{\frac{1}{2}}$의 값은?

① 1　② 2　③ 3　④ 4　⑤ 5

▸ 유형 ◂ 지수의 확장과 지수법칙
[2019년 9월 학평 나형 2학년 / 정답률 84%]

14. $8^{\frac{1}{3}}$ 의 값은?

① 1　② 2
③ 3　④ 4
⑤ 5

▸ 유형 ◂ 지수의 확장과 지수법칙
[2019년 9월 학평 나형 2학년 / 정답률 38%]

15. 2 이상의 자연수 n에 대하여 넓이가 $\sqrt[n]{64}$ 인 정사각형의 한 변의 길이를 $f(n)$이라 할 때, $f(4)\times f(12)$의 값을 구하시오.

▸ 유형 ◂ 지수의 확장과 지수법칙
[2019년 11월 학평 가형 2학년 / 정답률 92%]

16. $2^3\times 4^{\frac{1}{2}}$의 값은?

① 8　② 10
③ 12　④ 14
⑤ 16

▸ 유형 ◂ 지수의 확장과 지수법칙
[2019년 11월 학평 나형 2학년 / 정답률 83%]

17. $9^{\frac{3}{2}}$의 값은?

① 24　② 25
③ 26　④ 27
⑤ 28

정답 및 해설

1)
[정답] 5
[해설]
$\sqrt[3]{5}\times\sqrt[3]{25}=\sqrt[3]{5^3}=5$

2)
[정답] 11
[해설]
$x^a=b$에서 x는 b의 a제곱근이다.
(ⅰ) $a=5$일 때,
b의 5제곱근 중에서 실수인 것은 b의 값에 관계 없이 오직 하나 존재한다. 따라서 실수인 x는
$\sqrt[5]{-3}$, $\sqrt[5]{-2}$, $\sqrt[5]{2}$, $\sqrt[5]{3}$, $\sqrt[5]{4}$
이므로 개수는 5이다.
(ⅱ) $a=6$일 때,
㉠ $b>0$, 즉 $b=2$, 3, 4일 때, b의 a제곱근 중 실수인 것은 양수와 음수 각각 한 개씩 존재한다.
따라서 실수인 x는
$\sqrt[6]{2}$, $-\sqrt[6]{2}$, $\sqrt[6]{3}$, $-\sqrt[6]{3}$, $\sqrt[6]{4}$, $-\sqrt[6]{4}$
이므로 개수는 6이다.
㉡ $b<0$, 즉 $b=-3$, -2일 때, b의 a제곱근 중 실수인 것은 존재하지 않는다.
(ⅰ), (ⅱ)에서 공통인 x의 값은 존재하지 않는다.
따라서 $n(C)=11$이다.

3)
[정답] ②
[해설]
$\sqrt{(-2)^6}=\sqrt{2^6}=8$,
$(\sqrt[3]{3}-\sqrt[3]{2})(\sqrt[3]{9}+\sqrt[3]{6}+\sqrt[3]{4})=3-2=1$이므로
$\sqrt{(-2)^6}+(\sqrt[3]{3}-\sqrt[3]{2})(\sqrt[3]{9}+\sqrt[3]{6}+\sqrt[3]{4})=9$이다.

4)
[정답] 15
[해설]
모든 실수 x에 대하여
$\sqrt[3]{-x^2+2ax-6a}$ 가 음수가 되려면
$-x^2+2ax-6a<0$
즉, $x^2-2ax+6a>0$
이차방정식 $x^2-2ax+6a=0$의 판별식을 D라 할 때,
$\frac{D}{4}=a^2-6a=a(a-6)<0$
$0<a<6$이므로 $a=1, 2, 3, 4, 5$
따라서 $1+2+3+4+5=15$

5)
[정답] ④
[해설]
$\left(4^{\frac{1}{3}}\right)^3=4^1=4$

6)
[정답] ④
[해설]
$15^x=8=2^3$에서 $15=2^{\frac{3}{x}}$이고,
$a^y=2$에서 $a=2^{\frac{1}{y}}$이다.
$15\times a=2^{\frac{3}{x}}\times 2^{\frac{1}{y}}=2^{\frac{3}{x}+\frac{1}{y}}=2^2=4$이므로
$a=\frac{4}{15}$이다.

7)
[정답] ③
[해설]
$B_1=\dfrac{kI_0r_1^2}{2\left(x_1^2+r_1^2\right)^{\frac{3}{2}}}$,
$B_2=\dfrac{kI_0(3r_1)^2}{2\{(3x_1)^2+(3r_1)^2\}^{\frac{3}{2}}}=\dfrac{kI_0\times 9r_1^2}{2\left(9x_1^2+9r_1^2\right)^{\frac{3}{2}}}$
$=\dfrac{9kI_0r_1^2}{2\times 9^{\frac{3}{2}}\left(x_1^2+r_1^2\right)^{\frac{3}{2}}}=\dfrac{kI_0r_1^2}{6\left(x_1^2+r_1^2\right)^{\frac{3}{2}}}=\frac{1}{3}B_1$
이므로 $\frac{B_2}{B_1}=\frac{1}{3}$이다.

8)
[정답] ⑤
[해설]
(ⅰ) p, q가 모두 홀수일 때,
$f(p)\times f(q)=\sqrt[4]{9\times 2^{p+1}}\times\sqrt[4]{9\times 2^{q+1}}$
$=3\times\sqrt[4]{2^{p+q+2}}$
에서 $p+q+2$가 4의 배수일 때, $f(p)\times f(q)$는 자연수이다.
두 자연수 p, q가 각각 10 이하이므로 조건에 맞는 순서쌍 (p, q)는
㉠ $p+q+2=4$일 때, $(1, 1)$
㉡ $p+q+2=8$일 때, $(1, 5)$, $(3, 3)$, $(5, 1)$
㉢ $p+q+2=12$일 때, $(1, 9)$, $(3, 7)$, $(5, 5)$, $(7, 3)$, $(9, 1)$
㉣ $p+q+2=16$일 때, $(5, 9)$, $(7, 7)$, $(9, 5)$
㉤ $p+q+2=20$일 때, $(9, 9)$이므로
모든 순서쌍 (p, q)의 개수는 13이다.
(ⅱ) p는 홀수, q는 짝수일 때,
$f(p)\times f(q)=\sqrt[4]{9\times 2^{p+1}}\times\sqrt[4]{4\times 3^q}=\sqrt[4]{2^{p+3}\times 3^{q+2}}$ 에서
$p+3$과 $q+2$가 각각 4의 배수일 때,
$f(p)\times f(q)$는 자연수이다.
두 자연수 p, q가 각각 10 이하이므로
$p+3=4$, 8, 12,
$q+2=4$, 8, 12이고,

조건에 맞는 순서쌍 (p, q)는
$(1, 2)$, $(1, 6)$, $(1, 10)$, $(5, 2)$, $(5, 6)$, $(5, 10)$,
$(9, 2)$, $(9, 6)$, $(9, 10)$이므로
모든 순서쌍 (p, q)의 개수는 9이다.
(ⅲ) p는 짝수, q는 홀수일 때,
$f(p)\times f(q)=\sqrt[4]{4\times 3^p}\times\sqrt[4]{9\times 2^{q+1}}=\sqrt[4]{2^{q+3}\times 3^{p+2}}$
에서 $q+3$과 $p+2$가 각각 4의 배수일 때,
$f(p)\times f(q)$는 자연수이다.
두 자연수 p, q가 각각 10 이하이므로
$p+2=4$, 8, 12,
$q+3=4$, 8, 12이고,
조건에 맞는 순서쌍 (p, q)는
$(2, 1)$, $(2, 5)$, $(2, 9)$, $(6, 1)$, $(6, 5)$, $(6, 9)$,
$(10, 1)$, $(10, 5)$, $(10, 9)$이므로
모든 순서쌍 (p, q)의 개수는 9이다.
(ⅳ) p, q가 모두 짝수일 때,
$f(p)\times f(q)=\sqrt[4]{4\times 3^p}\times\sqrt[4]{4\times 3^q}=2\times\sqrt[4]{3^{p+q}}$ 에서
$p+q$가 4의 배수일 때,
$f(p)\times f(q)$는 자연수이다.
두 자연수 p, q가 각각 10 이하이므로
조건에 맞는 순서쌍 (p, q)는
㉠ $p+q=4$일 때, $(2, 2)$
㉡ $p+q=8$일 때, $(2, 6)$, $(4, 4)$, $(6, 2)$
㉢ $p+q=12$일 때, $(2, 10)$, $(4, 8)$, $(6, 6)$, $(8, 4)$, $(10, 2)$
㉣ $p+q=16$일 때, $(6, 10)$, $(8, 8)$, $(10, 6)$
㉤ $p+q=20$일 때, $(10, 10)$이므로
모든 순서쌍 (p, q)의 개수는 13이다.
따라서 (ⅰ), (ⅱ), (ⅲ), (ⅳ)에 의해
구하는 모든 순서쌍 (p, q)의 개수는 44이다.

9)
[정답] 152
[해설]
(Ⅰ) $a=c$일 때,
(ⅰ) $k<24$일 때, 조건을 만족시키는 순서쌍은 존재하지 않는다.
(ⅱ) $24\le k<500$일 때,
$a^{\frac{1}{b}}\times c^{\frac{1}{d}}=24^{\frac{1}{b}}\times 24^{\frac{1}{d}}=24^{\frac{1}{b}+\frac{1}{d}}=24^{\frac{1}{5}}$
따라서 $\frac{1}{b}+\frac{1}{d}=\frac{b+d}{bd}=\frac{1}{5}$ 이므로 $bd=5(b+d)$이고
$bd-5b-5d=0$이 되어 $(b-5)(d-5)=25$이다.

$b-5$	1	5	25
$d-5$	25	5	1

$(b, d)=(6, 30)$, $(10, 10)$, $(30, 6)$이다.
$24\le k<30$이면 조건을 만족시키는 순서쌍 (a, b, c, d)는 $(24, 10, 24, 10)$이므로 모든 순서쌍 (a, b, c, d)의 개수는 1이다.
$30\le k<500$이면 조건을 만족시키는 순서쌍 (a, b, c, d)는
$(24, 6, 24, 30)$, $(24, 10, 24, 10)$, $(24, 30, 24, 6)$이므로 모든 순서쌍 (a, b, c, d)의 개수는 3이다.
(Ⅱ) $a\ne c$일 때,
$$24^{\frac{1}{5}}=(2\times 12)^{\frac{1}{5}}=2^{\frac{1}{5}}\times 12^{\frac{1}{5}}$$
$$=(2^p)^{\frac{1}{5p}}\times(12^q)^{\frac{1}{5q}}\quad\cdots㉠$$
$$24^{\frac{1}{5}}=(3\times 8)^{\frac{1}{5}}=3^{\frac{1}{5}}\times 8^{\frac{1}{5}}$$
$$=(3^p)^{\frac{1}{5p}}\times(8^q)^{\frac{1}{5q}}\quad\cdots㉡$$
$$24^{\frac{1}{5}}=(4\times 6)^{\frac{1}{5}}=4^{\frac{1}{5}}\times 6^{\frac{1}{5}}$$
$$=(4^p)^{\frac{1}{5p}}\times(6^q)^{\frac{1}{5q}}\quad\cdots㉢$$
$$24^{\frac{1}{5}}=(24^2)^{\frac{1}{10}}=(24^3)^{\frac{1}{15}}=(24^4)^{\frac{1}{20}}=\cdots\quad\cdots㉣$$
의 네 가지 경우가 있다.
한편, ㉠, ㉡, ㉢에서 두 자연수 p, q의 값이 커지면 순서쌍 (a, b, c, d)의 개수도 증가한다.
2^p, 3^p, 4^p, 6^q, 8^q, 12^q의 값은
각각 2 이상 k 이하이므로 ㉠, ㉡, ㉢에서
$2^6=64$, $3^4=81$, $2^7=128$, $12^2=144$, $\cdots$을 이용하여 조건을 만족하는 모든 순서쌍 (a, b, c, d)의 개수가 59인 경우를 찾아보자.
(ⅰ) $64\le k<81$일 때,
㉠에서 $p=1$, 2, 3, 4, 5, 6, $q=1$,
즉, $5p=5$, 10, 15, 20, 25, 30, $5q=5$이다.
그런데 $a=2^p$, $c=12^q$인 경우와 $a=12^q$, $c=2^p$인 경우가 있고 각각의 경우 순서쌍의 개수는 같으므로 모든 순서쌍 (a, b, c, d)의 개수는 $6\times 1\times 2=12$이다.
㉡에서 $p=1$, 2, 3, $q=1$, 2,
즉, $5p=5$, 10, 15, $5q=5$, 10이다.
그런데 $a=3^p$, $c=8^q$인 경우와 $a=8^q$, $c=3^p$인 경우가 있고 각각의 경우 순서쌍의 개수는 같으므로 모든 순서쌍 (a, b, c, d)의 개수는
$3\times 2\times 2=12$이다.
㉢에서 $p=1$, 2, 3, $q=1$, 2,
즉, $5p=5$, 10, 15, $5q=5$, 10이다.
그런데 $a=4^p$, $c=6^q$인 경우와 $a=6^q$, $c=4^p$인 경우가 있고 각각의 경우 순서쌍의 개수는 같으므로 모든 순서쌍 (a, b, c, d)의 개수는
$3\times 2\times 2=12$이다.
한편, 음이 아닌 세 정수 p, q, r와 2이상인 자연수 n에 대하여
$$(24^n)^{\frac{1}{5n}}=(2^{3n}\times 3^n)^{\frac{1}{5n}}$$
$$=\left\{(2^p\times 3^q)^r\times 2^{3n-pr}\times 3^{n-qr}\right\}^{\frac{1}{5n}}$$
이 성립한다.
㉣에서 ㉠, ㉡, ㉢ 이외의 순서쌍을 구하기 위해 위식의 p, q, r, n에 자연수를 순차적으로 대입하자.
a 또는 c가 2, 3, 4, 6, 8, 12의 거듭제곱이 아닌 경우를 모두 구하면 다음과 같다.

ZOCBO.COM

$24^{\frac{1}{5}}=(24^2)^{\frac{1}{10}}=18^{\frac{1}{10}}\times 32^{\frac{1}{10}}$

$=18^{\frac{1}{10}}\times 2^{\frac{1}{2}}=18^{\frac{1}{10}}\times 4^{\frac{1}{4}}=18^{\frac{1}{10}}\times 8^{\frac{1}{6}}$

$=18^{\frac{1}{10}}\times 16^{\frac{1}{8}}=18^{\frac{1}{10}}\times 64^{\frac{1}{12}}=12^{\frac{1}{10}}\times 48^{\frac{1}{10}}$

$=72^{\frac{1}{10}}\times 8^{\frac{1}{10}}=72^{\frac{1}{10}}\times 64^{\frac{1}{20}}$,

$24^{\frac{1}{5}}=(24^7)^{\frac{1}{35}}=48^{\frac{1}{7}}\times 18^{\frac{1}{35}}$

따라서 ㉣에서 ㉠, ㉡, ㉢ 이외의 모든 순서쌍 (a,b,c,d)의 개수는

$k<72$일 때 $8\times 2=16$,

$k\geq 72$일 때 $10\times 2=20$이다.

그러므로 (Ⅰ)과 (Ⅱ)의 (ⅰ)에서 $64\leq k<72$일 때 모든 순서쌍 (a,b,c,d)의 개수는

$3+12+12+12+16=55$이므로 조건에 맞지 않고

$72\leq k<81$일 때에는 모든 순서쌍 (a,b,c,d)의 개수는 $3+12+12+12+20=59$이므로 조건에 맞다.

그러므로 k의 최솟값 m은 72이다.

(ⅱ) $k=81$일 때,

㉡에서 $p=1$, 2, 3, 4, $q=1$, 2,

즉, $5p=5$, 10, 15, 20, $5q=5$, 10이다.

(ⅰ)에서 구한 순서쌍 (a,b,c,d) 이외에도

4개의 순서쌍 (a,b,c,d)가 더 생긴다.

따라서 주어진 조건을 만족하지 않는다.

그러므로 k의 최댓값 M은 80이다.

따라서 $M+m=80+72=152$이다.

10)

[정답] ③

[해설]

$(\sqrt[3]{3})^3=\left(3^{\frac{1}{3}}\right)^3=3$

11)

[정답] ③

[해설]

$8^{\frac{1}{3}}\times 16^{\frac{1}{4}}=(2^3)^{\frac{1}{3}}\times(2^4)^{\frac{1}{4}}=2\times 2=4$

12)

[정답] ⑤

[해설]

$(\sqrt[3]{7})^n=\left(7^{\frac{1}{3}}\right)^n=7^{\frac{n}{3}}$

$7^{\frac{n}{3}}$이 자연수가 되도록 하려면

n은 3의 배수가 되어야 한다. $1\leq n\leq 15$이므로

n은 3, 6, 9, 12, 15이고 개수는 5이다.

13)

[정답] ④

[해설]

$(2^3\times 2)^{\frac{1}{2}}=(2^4)^{\frac{1}{2}}=4$

14)

[정답] ②

[해설]

$8^{\frac{1}{3}}=(2^3)^{\frac{1}{3}}=2$

15)

[정답] 2

[해설]

정사각형의 넓이가 $\sqrt[n]{64}$이므로

정사각형의 한 변의 길이

$f(n)=\sqrt{\sqrt[n]{64}}=2^{\frac{6}{2n}}=2^{\frac{3}{n}}$

따라서 $f(4)\times f(12)=2^{\frac{3}{4}}\times 2^{\frac{1}{4}}=2$

16)

[정답] ⑤

[해설]

$2^3\times 4^{\frac{1}{2}}=2^3\times(2^2)^{\frac{1}{2}}=8\times 2=16$

17)

[정답] ④

[해설]

$9^{\frac{3}{2}}=(3^2)^{\frac{3}{2}}=3^3=27$